

Beweisskizze zum Satz von Gauß:

Betrachtet werden 2 Sonderfälle, in einem dritten Schritt gewinnt man daraus die allgemeine Aussage.

Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$,

U sei eine offene Umgebung von Q und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Wir wollen für $i = 1, \dots, n$ die Integrale

$$\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathcal{L}^n$$

ausrechnen. Dazu sei o.E. $i = n$. Wir schreiben

$$x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$Q' = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$$

und bekommen:

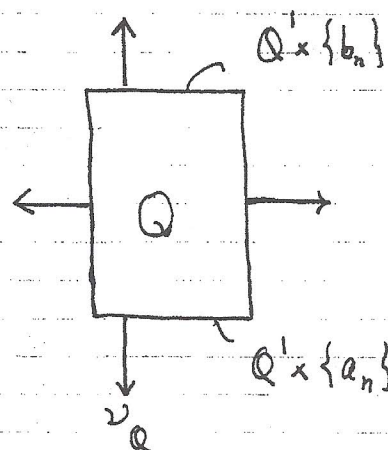
$$\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_n} d\mathcal{L}^n(x) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{Q'} \left[\int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n \right] d\mathcal{L}^{n-1}(x')$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \int_{Q'} (f(x', b_n) - f(x', a_n)) d\mathcal{L}^{n-1}(x')$$

Hauptsatz

$$= \int_{Q' \times \{b_n\}} f \cdot d\mathcal{L}^{n-1} - \int_{Q' \times \{a_n\}} f \cdot d\mathcal{L}^{n-1}$$

Sei ν_Q die äußere Normale
an ∂Q . Es gilt



$$\nu_Q \cdot (0, \dots, 0, \pm 1) =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{auf } Q' \times \{b_n\} \\ -1 & \text{auf } Q' \times \{a_n\} \\ 0 & \text{auf dem Rest von } \partial Q \end{cases}$$

Folglich lautet die Integralbeziehung

$$(1) \quad \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_n} d\mathcal{L}^n = \int_{\partial Q} \nu_Q \cdot (0, \dots, 0, \pm 1) d\mathcal{H}^{n-1}$$

Bem: ν_Q ist auf Kanten undefiniert, das sind aber $\mathcal{H}^{n-1}$ -Nullmengen!

(1) gilt entsprechend für jede Koordinatenrichtung $i=1, \dots, n$, also

$$(2) \quad \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathcal{L}^n = \int_{\partial Q} \nu_Q \cdot (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{\pm 1}, 0, \dots, 0) d\mathcal{H}^{n-1}$$

Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld definiert auf einer offenen
Umgebung U von Q . Man hat

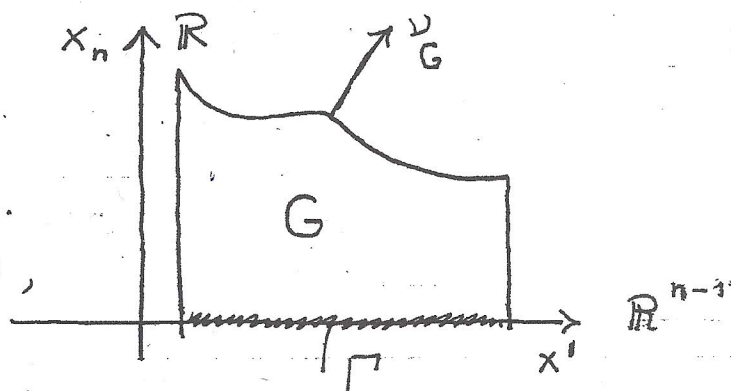
$$\int_Q \operatorname{div} F \cdot d\mathcal{L}^n = \sum_{i=1}^n \int_Q \frac{\partial F^i}{\partial x_i} d\mathcal{L}^n \stackrel{(2)}{=} \quad \quad \quad \text{c}$$

$$\int_{\partial Q} \nu \cdot F d\mathcal{L}^{n-1}$$

Also gilt der Satz von Gauß für Quader, er folgt mit Fubini aus dem Hauptsatz der 1-dim. Differential und Integralrechnung.

Jetzt beweisen wir den Satz von Gauß für Graphenränder :

$\Gamma :=$ Gebiet in $\mathbb{R}^{n-1}$,
d.h. $\neq \emptyset$, offen und zshgd.
(später: $\Gamma = \text{Quader} \subset \mathbb{R}^{n-1}$),



$\gamma: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ sei C^1 -Fkt. > 0 ,

$\operatorname{graph}(\gamma)$ ist dann eine Hyperfläche der Klasse C^1 ,

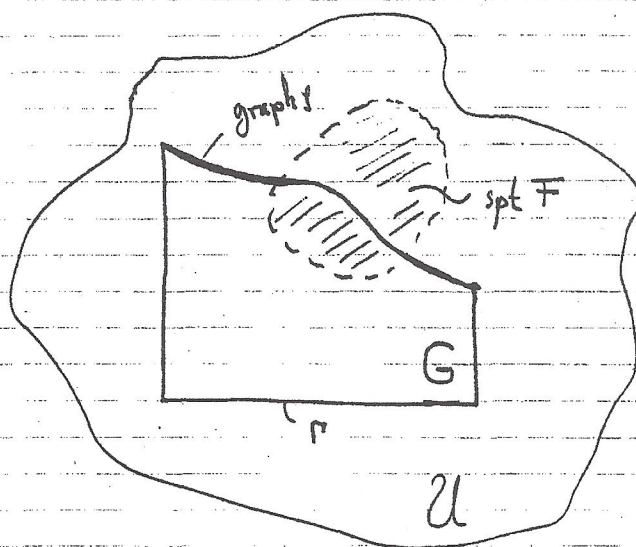
$$G := \{ (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in \Gamma, 0 < x_n < \gamma(x') \}$$

Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld definiert auf einer offenen Umgebung U von $\overline{G}$.

Notation: $\operatorname{spt}(F) := \underline{\text{Träger von } F} := \text{Abschluß von } \{x : F(x) \neq 0\}$

Bedingung:

$$\begin{aligned} \text{spt}(F) \cap \partial G \\ \subset \text{graph}(f) \end{aligned}$$



Dann gilt offenbar:

$$\int_{\partial G} F \cdot \nu_G \, d\mathcal{L}^{n-1} = \int_{\text{graph}(f)} F \cdot \nu_G \, d\mathcal{L}^{n-1},$$

und das Integral rechts können wir umformen:

$$\int_{\text{graph}(f)} F \cdot \nu_G \, d\mathcal{L}^{n-1} \stackrel{\uparrow}{=} \int_{\Gamma} F(x', f(x')) \cdot \nu_G(x', f(x')) \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2} \, d\mathcal{L}^{n-1}(x')$$

Satz 25.13 für Graphen

$$\text{Es ist } \nu_G(x', f(x')) = (-\nabla f(x'), 1) / \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}$$

(denn $(0 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1} \dots 0, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x'))$, $i=1, \dots, n$, ist Basis des Tangentialraumes an $\text{graph}(f)$ in $(x', f(x'))$)

$$\Rightarrow \int_{\partial G} F \cdot \nu_G \, d\mathcal{L}^{n-1} = \int_{\Gamma} F(x', f(x')) \cdot (-\nabla f(x'), 1) \, d\mathcal{L}^{n-1}(x') =$$

$$(3) \quad \int_{\Gamma} \left[- \sum_{i=1}^{n-1} F^i(x', f(x')) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') + F^n(x', f(x')) \right] d\mathcal{L}^{n-1}(x')$$

Nun diskutieren wir das

$$\text{Volumenintegral} \quad \int_G \operatorname{div} \vec{F} \cdot d\mathcal{L}^n$$

und beachten

$$G = \{ (x', \pm y(x')) : x' \in \Gamma, 0 < t < 1 \}.$$

Sei

$$\Phi : \Gamma \times (0, 1) \ni (x', t) \longrightarrow (x', \pm y(x')) \in G.$$

Φ ist C^1 und bijektiv mit

$$D\Phi(x', t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & y(x') \end{pmatrix} \pm \partial_{x_1} y(x') \dots \pm \partial_{x_{n-1}} y(x') y(x')$$

$$\Rightarrow \det D\Phi(x', t) = y(x') > 0,$$

d.h. Φ ist sogar ein C^1 -Diffeomorphismus. Es folgt

$$\int_G \operatorname{div} \vec{F} \, d\mathcal{L}^n = \int_{\Gamma \times (0, 1)} (\operatorname{div} \vec{F})(x', \pm y(x')) \cdot y(x') \, d\mathcal{L}^n(x', t) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left[\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{F}^i}{\partial x_i}(x', \pm y(x')) y(x') \, dx' \right] dt =$$

$$\int_0^1 \left[\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \dots \, dx' \right] dt + \int_0^1 \int_{\Gamma} \frac{\partial \vec{F}^n}{\partial x_n}(x', y(x') \cdot t) \cdot y(x') \, dx' \, dt$$

Für $i = 1, \dots, n-1$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(F^i \circ \Phi \right) (x', t) = \underbrace{D F^i \left(\Phi(x', t) \right)}_{= \text{Ableitung von } F^i} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x', t) =$$

$$\nabla F^i (x', t, \varphi(x')) \cdot \left(0 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1} \dots 0, t \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (x') \right) =$$

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_i} (x', t, \varphi(x')) + \frac{\partial F^i}{\partial x_n} (x', t, \varphi(x')) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (x') \cdot t \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F^i}{\partial x_i} (x', t, \varphi(x')) \cdot \varphi(x') =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(F^i \circ \Phi \right) (x', t) \cdot \varphi(x') - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F^i}{\partial x_n} (x', t, \varphi(x')) t \varphi(x') \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (x')$$

Einsetzen dieser Gleichung ergibt

$$\left. \begin{aligned} & \int_G \operatorname{div} F \cdot d\mathcal{L}^n = \\ & \int_0^1 \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(F^i \circ \Phi \right) (x', t) \varphi(x') dx' dt \\ & - \int_0^1 \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F^i}{\partial x_n} (x', t, \varphi(x')) t \varphi(x') \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (x') dx' dt \\ & + \int_0^1 \int_{\Gamma} \frac{\partial F^n}{\partial x_n} (x', t, \varphi(x')) \varphi(x') dx' dt \end{aligned} \right\} (4)$$

Zur weiteren Auswertung von (4) beachte man

9

$$(5) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{F}^n \circ \Phi)(x', t) = D\mathbb{F}^n(\Phi(x', t)) \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x', t) = \\ \nabla \mathbb{F}^n(x', t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \end{pmatrix} = \mathbb{F}(x') \cdot \frac{\partial \mathbb{F}^n}{\partial x_n}(x', t) \end{cases}$$

und für $i = 1, \dots, n-1$

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbb{F}^i \circ \Phi)(x', t) \cdot \mathbb{F}(x') &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\mathbb{F}^i \circ \Phi)(x', t) \cdot \mathbb{F}(x') \right) \\ &- (\mathbb{F}^i \circ \Phi)(x', t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{F}(x') \end{aligned}$$

Das letzte Integral rechts in (4) wird mit (5) umgeformt, das erste Integral rechts in (4) wird mit (6) umgeschrieben $\implies$

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div} \mathbb{F} \cdot d\mathcal{L}^n &= \\ \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\mathbb{F}^i \circ \Phi)(x', t) \cdot \mathbb{F}(x') \right) dx' dt & \\ - \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 \int_{\Gamma} (\mathbb{F}^i \circ \Phi)(x', t) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{F}(x') dx' dt & \\ - \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbb{F}^i}{\partial x_n}(x', t) \mathbb{F}(x') + \mathbb{F}(x') \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x_i}(x') dx' dt & \\ + \int_0^1 \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{F}^n \circ \Phi)(x', t) dx' dt & =: \text{I} - \text{II} - \text{III} + \text{IV} \end{aligned}$$

Wir nehmen an: Γ ist ein Quader in $\mathbb{R}^{n-1}$

Dann ist

$$I = \int_0^1 \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_i} (x', t) dx' dt$$

mit dem Vektorfeld $\Theta: \Gamma \times (0, 1) \ni (x', t) \mapsto \left((\overline{F}^i \circ \Phi)(x', t) \cdot \gamma(x') \right)_{1 \leq i \leq n-1}$

Für jedes feste t ist daher

$$\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Theta^i}{\partial x_i} (x', t) dx'$$

ein $(n-1)$ -dimensionales Divergenzintegral über Γ , also nach dem ersten Teil

$$= \int_{\partial \Gamma} \Theta(\cdot, t) \cdot \nu_{\Gamma} d\mathcal{H}^{n-2}.$$

Es gilt $\Theta(x', t) = \left(\overline{F}^i(x', t \gamma(x')) \gamma(x') \right)_{1 \leq i \leq n-1} = 0$

für $x' \in \partial \Gamma$, denn $(x', t \gamma(x'))$ gehört dann zu ∂G , aber nicht zu $\text{graph}(\gamma)$ und $\text{spt } \overline{F} \cap \partial G \subset \text{graph}(\gamma)$.

Also: $I = 0$

Weiter beachtet man:

$$II + III = \int_0^1 \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\overline{F}^i(x', t \gamma(x')) + \frac{\partial \overline{F}^i}{\partial x_n}(x', t \gamma(x')) \cdot t \gamma(x') \right] \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x') dx' dt =$$

$$= \int_0^1 \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(t F^i(x', t f(x')) \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') dx' dt,$$

also:

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^n &= \\ &= - \int_0^1 \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(t F^i(x', t f(x')) \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') dx' dt \\ &+ \int_0^1 \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} F^n(x', t f(x')) dx' dt \quad \leftarrow \text{Fubini + Hauptsatz} \\ &= - \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} F^i(x', f(x')) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') dx' \\ &+ \int_{\Gamma} F^n(x', f(x')) dx' - \underbrace{\int_{\Gamma} F^n(x', 0) dx'}_{=0}, \end{aligned}$$

und nach (3) ist das $= \int_{\partial G} F \cdot \nu_G \, d\mathcal{L}^{n-1}$

Nun zum letzten Schritt: Zu $x \in \overline{G}$ wählt man eine Kugel $B_{r(x)}(x)$

(offen) wie folgt: ist $x \in G$, so soll $\underbrace{B_{r(x)}(x)}_{\text{der Umwürfel zu}}$ in G liegen.

Ist dagegen $x \in \partial G$ und bezeichnet W den offenen Umwürfel zu

$B_{r(x)}(x)$, so soll $W \cap G$ nach Drehung und Verschiebung von der

Gestalt $\{(x', t f(x')) : x' \in \Gamma, 0 < t < 1\}$ sein mit einem

Würfel Γ in $\mathbb{R}^{n-1}$ und einer Funktion $f: \Gamma \xrightarrow{c_1} (0, \infty)$.

Aus $\overline{G} \subset \bigcup_{x \in \overline{G}} B_{r(x)}(x)$ folgt wegen der Kompaktheit von $\overline{G}$:

$$\exists L \in \mathbb{N} \text{ mit } \overline{G} \subset \bigcup_{i=1}^L B_{r(x_i)}(x_i)$$

Für jedes i wählen wir eine C^∞ -Funktion $\psi_i \geq 0$ mit

$$\psi_i \equiv 1 \text{ auf } B_{r_i}(x_i),$$

$$\psi_i \equiv 0 \text{ außerhalb von } B_{2r_i}(x_i).$$

Dann gilt $\rho(x) := \sum_{i=1}^L \psi_i(x) > 0$ auf $\overline{G}$.

Sei $\rho_i := \psi_i / \rho \implies \sum_{i=1}^L \rho_i \equiv 1$ auf $\overline{G}$.

Es folgt:

$$\int_G \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^n = \int_G \sum_{i=1}^L \operatorname{div}(\rho_i F) \, d\mathcal{L}^n$$

Man fixiert ein i : Gehört x_i zu G , so liegt der Umwürfel W_i zu

$B_{2r(x_i)}(x_i)$ ganz in G , nach Gauß folgt:

$$\int_G \operatorname{div}(\rho_i F) \, d\mathcal{L}^n = \int_{W_i} \operatorname{div}(\rho_i F) \, d\mathcal{L}^n =$$

$$\int_{\partial W_i} \rho_i F \cdot \nu_{W_i} \, d\mathcal{L}^{n-1} = 0,$$

denn $\rho_i = 0$ auf ∂W_i .

Liegt x_i in ∂G , so reduziert sich das Divergenzintegral von $\rho_i F$ im wesentlichen auf

$$\int \operatorname{div}(\rho_i F) d\mathcal{L}^n \\ \{ (x', t, \varphi(x')) : x' \in \Pi, 0 < t < 1 \}$$

und nach den Trägereigenschaften von $\rho_i F$ und der bewiesenen Version von Gauß ist das

$$= \int_{\partial G} \rho_i \cdot F \cdot \nu_G d\mathcal{A}^{n-1},$$

$$\text{insgesamt} \quad \int_G \operatorname{div} F \cdot d\mathcal{L}^n = \int_{\partial G} \sum_{i=1}^L \rho_i F \cdot \nu_G d\mathcal{A}^{n-1} =$$

$$\int_{\partial G} F \cdot \nu_G d\mathcal{A}^{n-1}$$

